第20講　斜回転体の体積

20

［A］　直線 l：$y=mx$ $(m>0)$ と曲線 C：$y=x^2$ によって囲まれる部分を D とする．D を l を軸に回転してできる立体の体積 V を求めよ．

［B］　直線 l_1：$y=x$ と l_2：$y=-x+\pi$ と曲線 C：$y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ によって囲まれる部分を D とする．D を l_1 を軸に回転してできる立体の体積 V を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　斜回転体の体積

20　関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを曲線 C とする．

(1)　曲線 C 上の点 $\mathrm{A}\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ における接線 l の方程式を求めよ．

(2)　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$ から l に下ろした垂線の足を H とする．H の座標と線分 PH の長さを t を用いて表せ．

(3)　l と y 軸との交点を Q とし，線分 QH の長さを s とするとき，s を t を用いて表せ．

(4)　曲線 C と直線 l と y 軸で囲まれた部分を，直線 l の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　斜回転体の体積

20

［A］　直線 l：$y=mx$ $(m>0)$ と曲線 C：$y=x^2$ によって囲まれる部分を D とする．D を l を軸に回転してできる立体の体積 V を求めよ．

［B］　直線 l_1：$y=x$ と l_2：$y=-x+\pi$ と曲線 C：$y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ によって囲まれる部分を D とする．D を l_1 を軸に回転してできる立体の体積 V を求めよ．

【答】［A］ $\dfrac{m^5}{30\sqrt{1+m^2}}\pi$

［B］ $\dfrac{\sqrt{2}\pi^2(\pi^2-9)}{12}$

【解説】

［A］　原点以外の l と C の交点を A とすると，A$(m,\ m^2)$ である．このとき，線分 OA 上の点 P を考え，OP$=s$ とする．点 P を通り，l に垂直な直線と C の $x\geqq 0$ の部分との交点を Q とすると，求める体積は，OA$=m\sqrt{1+m^2}$ より

$$V=\int_0^{m\sqrt{1+m^2}}\pi \mathrm{PQ}^2 ds$$

により求めることができる．

ここで，Q の x 座標を t として，l 上の点 R を QR が y 軸と平行になるように定めると Q$(t,\ t^2)$，R$(t,\ mt)$ となる．ここで $m=\tan\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\mathrm{OR}=\frac{t}{\cos\theta},\ \mathrm{PR}=\mathrm{RQ}\sin\theta$$

より OP＝OR－PR つまり $s=\dfrac{t}{\cos\theta}-(mt-t^2)\sin\theta$ を得る．

このとき $ds=\left\{\dfrac{1}{\cos\theta}-(m-2t)\sin\theta\right\}dt$ である．

また，PQ＝RQ$\cos\theta$ より

$$\mathrm{PQ}=(mt-t^2)\cos\theta$$

となる．

ここで，OP$=s$ を 0 から OA$=m\sqrt{1+m^2}$ まで動かしたとき，t は 0 から m まで変化するので

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{m\sqrt{1+m^2}}\pi \mathrm{PQ}^2 ds\\&=\int_0^m \pi(mt-t^2)^2\cos^2\theta\cdot\left\{\frac{1}{\cos\theta}-(m-2t)\sin\theta\right\}dt\\&=\pi\int_0^m\{\cos\theta\cdot(m^2t^2-2mt^3+t^4)-\sin\theta\cos^2\theta\cdot(mt-t^2)^2(m-2t)\}dt\\&=\pi\left[\cos\theta\cdot\left(\frac{m^2}{3}t^3-\frac{m}{2}t^4+\frac{1}{5}t^5\right)-\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{3}(mt-t^2)^3\right]_0^m\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$=\dfrac{m^5\cos\theta}{30}\pi$

$=\boldsymbol{\dfrac{m^5}{30\sqrt{1+m^2}}\pi}$

［B］ l_1 と l_2 の交点を A とすると，$\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ である．このとき，線分 OA 上の点 P を考え，$\mathrm{OP}=s$ とする．点 P を通り，l_1 に垂直な直線と C との交点を Q とすると，求める体積は，$\mathrm{OA}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ より

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\pi\mathrm{PQ}^2\,ds$$

により求めることができる．

ここで，Q の x 座標を t として，l_1 上の点 R を QR が y 軸と平行になるように定めると $\mathrm{Q}(t,\ \sin t)$，$\mathrm{R}(t,\ t)$ となり

$$\mathrm{OR}=\sqrt{2}\,t,\quad \mathrm{PR}=\frac{\mathrm{RQ}}{\sqrt{2}}$$

より $\mathrm{OP}=\mathrm{OR}-\mathrm{PR}$ つまり $s=\sqrt{2}\,t-\dfrac{t-\sin t}{\sqrt{2}}$ を得る．

このとき $ds=\left(\sqrt{2}-\dfrac{1-\cos t}{\sqrt{2}}\right)dt$ である．

また，$\mathrm{PQ}=\dfrac{\mathrm{RQ}}{\sqrt{2}}$ より

$$\mathrm{PQ}=\frac{t-\sin t}{\sqrt{2}}$$

となる．

ここで，$\mathrm{OP}=s$ を 0 から $\mathrm{OA}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ まで動かしたとき，t は 0 から π まで変化するので

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\pi\mathrm{PQ}^2\,ds\\
&=\int_0^{\pi}\pi\left(\frac{t-\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{1-\cos t}{\sqrt{2}}\right)dt\\
&=\pi\int_0^{\pi}\left\{\frac{t^2-2t\sin t+\dfrac{1-\cos 2t}{2}}{\sqrt{2}}-\left(\frac{t-\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{1-\cos t}{\sqrt{2}}\right\}dt\\
&=\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{t^3}{3}-2(-t\cos t+\sin t)+\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right\}-\frac{1}{3}\left(\frac{t-\sin t}{\sqrt{2}}\right)^3\right]_0^{\pi}\\
&=\frac{\pi^2(\pi^2-9)}{6\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}\,\pi^2(\pi^2-9)}{12}}
\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　斜回転体の体積

20　関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを曲線 C とする.

(1)　曲線 C 上の点 $A\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ における接線 l の方程式を求めよ.

(2)　曲線 C 上の点 $P\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$ から l に下ろした垂線の足を H とする. H の座標と線分 PH の長さを t を用いて表せ.

(3)　l と y 軸との交点を Q とし, 線分 QH の長さを s とするとき, s を t を用いて表せ.

(4)　曲線 C と直線 l と y 軸で囲まれた部分を, 直線 l の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ.

【答】　(1) $y=x-\frac{1}{2}$　(2) $H\left(\frac{t^2+2t+1}{4},\ \frac{t^2+2t-1}{4}\right)$, $PH=\frac{\sqrt{2}}{4}(t-1)^2$

(3) $s=\frac{\sqrt{2}}{4}(t+1)^2$　(4) $\frac{\sqrt{2}}{40}\pi$

【解説】

(1)　$y'=x$ より l の傾きは1. よって

$$y=1(x-1)+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad l:\boldsymbol{y=x-\frac{1}{2}}$$

(2)　$H\left(u,\ u-\frac{1}{2}\right)$ とおける. このとき $\overrightarrow{PH}\perp(1,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{PH}\cdot(1,\ 1)=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left(u-t,\ u-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t^2\right)\cdot(1,\ 1)=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad 2u-\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{2}=0$$

$$\therefore\quad u=\frac{t^2+2t+1}{4}$$

よって

$$\boldsymbol{H\left(\frac{t^2+2t+1}{4},\ \frac{t^2+2t-1}{4}\right)}$$

また線分 PH の長さは $l:x-y-\frac{1}{2}=0$ と $P\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$ との距離となるので

$$PH=\frac{\left|t-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\left|-\frac{1}{2}(t-1)^2\right|}{\sqrt{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}(t-1)^2}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

⑶　QH の傾きは 1 より

$$\mathrm{QH}=\sqrt{2}\,|\mathrm{H}\text{の}x\text{座標}|$$

$$\iff\quad s=\sqrt{2}\left|\frac{t^2+2t+1}{4}\right|$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{s=\frac{\sqrt{2}}{4}(t+1)^2}$$

⑷　求める体積を V とおくと，

$$\begin{aligned}V&=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\pi\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{3}+\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\sqrt{2}}\pi\mathrm{PH}^2\,ds\\&=\frac{\sqrt{2}}{96}\pi+\pi\int_0^1\frac{1}{8}(t-1)^4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(t+1)\,dt\\&=\frac{\sqrt{2}}{96}\pi+\pi\int_0^1\left\{\frac{\sqrt{2}}{16}(t-1)^5+\frac{\sqrt{2}}{8}(t-1)^4\right\}dt\\&=\frac{\sqrt{2}}{96}\pi+\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{96}(t-1)^6+\frac{\sqrt{2}}{40}(t-1)^5\right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{40}\pi}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。